ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο μεταβλητά μεγέθη x,y που συνδέονται με μία συναρτησιακή σχέση y=f(x) και f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε το $f'(x_0)$ λέγεται ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στη θέση x_o.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης θέσης ενός κινητού δηλαδή της συνάρτησης του διαστήματος είναι η ταχύτητα συνεπώς ισχύει ότι:
  $U(t) = S'(t)$ ή $U(t) = X'(t)$

- Ο ρυθμός μεταβολής της ταχύτητας ενός κινητού είναι η επιτάχυνση συνεπώς ισχύει ότι: $\alpha(t) = U'(t)$. Δηλαδή ισχύει ότι $\alpha(t) = U'(t) = S''(t)$.

- Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης του κόστους παραγωγής ενός προϊόντος λέγεται οριακό κόστος.

- Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης της είσπραξης ενός προϊόντος λέγεται οριακή είσπραξη.

- Ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης του κέρδους ενός προϊόντος λέγεται οριακό κέρδος.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση h ώστε $h(x) = \ln x$ με χ>0 και $\mathrm{A}\left(\alpha, h\left(\alpha\right)\right)$ σημείο της γραφικής παράστασης C_h. Αν το σημείο Α απομακρύνεται από τον y′y με σταθερή ταχύτητα 2 μον/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Α την χρονική στιγμή που η εφαπτομένη της C_h στο σημείο Α διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

Η εφαπτομένη της C_h στο το σημείο $\mathrm{A}\left(\alpha, h\left(\alpha\right)\right)$ είναι

$$\varepsilon\varphi_A : y - h(a) = h'(a)\,(x-a) \Rightarrow y - \ln a = \frac{1}{a}\,(x-a) \Rightarrow y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1$$

Αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων , το Ο(0,0) την επαληθεύει

Άρα $0 = \frac{1}{a}\cdot 0 + \ln a - 1 \Rightarrow \ln a = 1 \Rightarrow a = e$ άρα το σημείο είναι το $\mathrm{A}\left(e, h\left(e\right)\right)$

Δηλ. $\mathrm{A}\left(e, 1\right)$ Άρα ισχύει ότι $x\left(t_0\right) = e$ και $y\left(t_0\right) = 1$

Αφού $\mathrm{A}\left(\alpha, h\left(\alpha\right)\right)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης C_h

Η συναρτησιακή σχέση που συνδέει τις συντεταγμένες έχει ως εξής : $y(t) = \ln x(t)$

παραγωγίζουμε οπότε προκύπτει ότι $\left(y(t)\right)' = \left(\ln x(t)\right)' \Rightarrow y'(t) = \frac{1}{x(t)}x'(t)$

Άρα για $t=t_0$ έχουμε

$$y'(t_0) = \frac{1}{x(t_0)}x'(t_0) \Rightarrow y'(t_0) = \frac{1}{e}2 \ \ \mu o\nu / \sec \Rightarrow y'(t_0) = \frac{2}{e} \ \ \mu o\nu / \sec$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $\mathrm{f(x)} = \ln \mathrm{x} - \mathrm{x} + 1$ με χ>0 .

Αν το σημείο Μ(χ,y) κινείται στην γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f και η τετμημένη χ μεταβάλλεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης την στιγμή που η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης είναι παράλληλη στην ευθεία $\mathrm{y} = 2\mathrm{x} + 2$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι το σημείο Μ(χ,y) κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η τετμημένη χ μεταβάλλεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο άρα $y(t)=\ln x(t)-x(t)+1$ και $x'(t)=2\ \mu o \nu / sec$

Απαιτούμε $f'(x_0)=2 \Rightarrow \frac{1}{x_0}-1=2 \Rightarrow \frac{1}{x_0}=3 \Rightarrow x_0=\frac{1}{3}$

Άρα την χρονική στιγμή t_0 που η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2$ θα είναι όταν $x(t_0)=\frac{1}{3}$

έχουμε $y'(t)=\left(\ln x(t)-x(t)+1\right)' \Rightarrow y'(t)=\frac{1}{x(t)}x'(t)-x'(t)$

για $t=t_0$ προκύπτει

$$y'(t_0)=\frac{1}{x(t_0)}x'(t_0)-x'(t_0) \Rightarrow y'(t_0)=\frac{1}{\frac{1}{3}}2-2 \Rightarrow\Rightarrow y'(t_0)=4\ \mu o \nu / sec$$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x+2,\quad x\in R$ και $g(x)=-x^2+2$ για κάθε $x\in R$. Δύο σημεία με την ίδια τετμημένη $A(x(t), y_1(t))$, $B(x(t), y_2(t))$ κινούνται στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα. Αν η τετμημένη τους αυξάνεται με ρυθμό 1cm/sec, να βρείτε την θέση των σημείων για την οποία ισχύει: $y_1'(t)=2y_2'(t)+1,\ t\geq 0$

ΛΥΣΗ

$x'(t)=$ 1cm/sec , $y_1(t)=e^{x(t)}+2,\ t\geq 0$, $y_2(t)=2-x^2(t),\ t\geq 0$

$$y_1'(t)=2y_2'(t)+1 \Leftrightarrow e^{x(t)}\cdot x'(t)=-4x(t)\cdot x'(t)+1 \Leftrightarrow e^{x(t)}=-4x(t)+1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e^{x(t)}+4x(t)-1=0$$

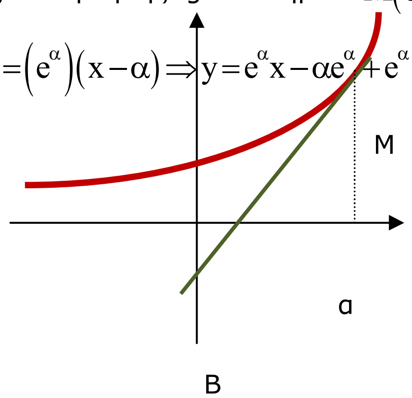
Θεωρώ συνάρτηση $K(x)=e^x+4x-1$, $x\varepsilon R$. Η K(x) είναι γνησίως αύξουσα στο R
Η εξίσωση $e^x+4x-1=0$ έχει μοναδική λύση και μάλιστα αυτή η λύση είναι η x=0. Άρα τα σημεία είναι: A(0,3) και B(0,2)

4. Ένα σημείο Μ κινείται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g με $g(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}$ όπου η τετμημένη του σημείου $M(\alpha, g(\alpha))$ μεταβάλλεται με ρυθμό $\alpha'(t) = -\dfrac{\alpha(t)}{e}$ μονάδες/sec. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο Μ τέμνει τον άξονα y′y στο σημείο Β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Β την στιγμή που το Μ έχει τετμημένη 1.

ΛΥΣΗ

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $M(\alpha, g(\alpha))$

είναι $\varepsilon:\ y - g(\alpha) = g'(\alpha)(x-\alpha) \Rightarrow y - (e^\alpha + 1) = (e^\alpha)(x-\alpha) \Rightarrow y = e^\alpha x - \alpha e^\alpha + e^\alpha + 1$



Για χ=0 έχουμε $y = -\alpha e^\alpha + e^\alpha + 1$

άρα το σημείο που Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα y′y είναι το $B(0, -\alpha e^\alpha + e^\alpha + 1)$ οπότε έχουμε

$B(t) = -\alpha(t)e^{\alpha(t)} + e^{\alpha(t)} + 1$

παραγωγίζω $B'(t) = -\alpha'(t)e^{\alpha(t)} - \alpha(t)\alpha'(t)e^{\alpha(t)} + \alpha'(t)e^{\alpha(t)} = \alpha(t)\alpha'(t)e^{\alpha(t)}$

$B'(t) = -\alpha(t)\alpha'(t)e^{\alpha(t)}$

για την χρονική στιγμή $t = t_0$ έχουμε $\alpha(t_0) = 1$ και $\alpha'(t_0) = -\dfrac{\alpha(t_0)}{e} = -\dfrac{1}{e}$

οπότε $B'(t_0) = -\alpha(t_0)\alpha'(t_0)e^{\alpha(t_0)} = -1 \cdot \left(-\dfrac{1}{e}\right) \cdot e^1 = 1$ μονάδες/sec

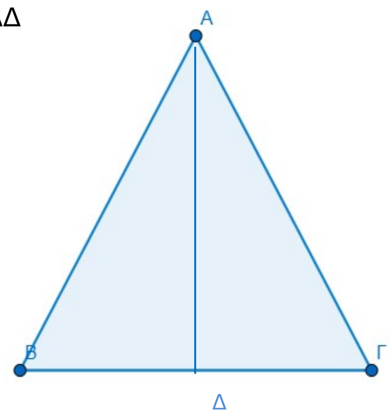
5. Σε οξυγώνιο ισοσκελέςτρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ=8 cm η ΒΓ αυξάνεται με ρυθμό $2\sqrt{3}cm\backslash sec$. Αν χ=ΒΓ και θ η γωνία $\widehat{AB\Gamma}$.

α. Να αποδείξετε ότι (ΑΒΓ)=$\frac{1}{4}x^2 \varepsilon\varphi\theta$

β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ τη χρονικήt_0 που το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού(ΑΒΓ) τη χρονική στιγμή που το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

ΛΥΣΗ



α. Έχουμε χ΄(t)=$2\sqrt{3}$ και $\hat{B} = \hat{\theta}$, ΒΓ=χ φέρνουμε το ύψος ΑΔ

Τότε (ΑΒΓ)=$\frac{A\Delta\ B\Gamma}{2}$ (1)

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{A\Delta}{\frac{\chi}{2}} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{2A\Delta}{\chi} \Leftrightarrow A\Delta = \frac{\chi\ \varepsilon\varphi\theta}{2} \quad (2)$$

η σχέση 1 από τη 2 μας δίνει ότι (ΑΒΓ)=$\frac{x^2\,\varepsilon\varphi\theta}{4}$

β. συνθ(t)=$\frac{\frac{x(t)}{2}}{8} \Leftrightarrow x(t) = 16\sigma\upsilon\nu\theta(t) \Leftrightarrow x'$(t)=16(-ημθ(t))

θ′(t)$\Leftrightarrow \theta'(t) = \frac{2\sqrt{3}}{16(-\eta\mu\frac{\pi}{3})} \Leftrightarrow \theta'(t) = \frac{2\sqrt{3}}{16(-\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$

γ. E(t)=$\frac{x^2(t)\varepsilon\varphi\theta(t)}{4} \Leftrightarrow E'(t) = \frac{2x(t)x'(t)\varepsilon\varphi\theta(t)+x^2(t)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta(t)}\theta'(t)}{4} \Leftrightarrow$

$$E'(t) = \frac{2\ 8\ 2\sqrt{3}\sqrt{3}+64\frac{1}{4}(-\frac{1}{4})}{4} = \frac{96-64}{4} = \frac{32}{4} = 8cm^2\backslash s$$

6. Δίνεται πραγματική συνάρτηση g με $g(x) = e^x + x - 1$ Ένα σημείο Μ(χ,y) κινείται στην γραφική παράσταση $C_{g'}$ της παραγώγου συνάρτησης g' . Αν η τετμημένη του σημείου Μ μεταβάλλεται με ρυθμό 2 μον/sec να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης του σημείου Μ από το σημείο Α(1,0) την στιγμή που το Μ διέρχεται από τον άξονα y΄y .

παράστασης είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε το σημείο Μ(χ,y) ότι κινείται στην γραφική παράσταση $C_{g'}$ της παραγώγου συνάρτησης g' , οπότε $y = g'(x) \Rightarrow y = e^x + 1$.

Έχουμε $M\left(x, e^x + 1\right)$

Η απόσταση από το Α είναι $(MA) = \sqrt{(x-1)^2 + \left(e^x + 1 - 0\right)^2}$

Οπότε $d(t) = \sqrt{\left(x(t) - 1\right)^2 + \left(e^{x(t)} + 1\right)^2}$

Άρα $d'(t) = \dfrac{2\left(x(t) - 1\right)x'(t) + 2\left(e^{x(t)} + 1\right)e^{x(t)}x'(t)}{2\sqrt{\left(x(t) - 1\right)^2 + \left(e^{x(t)} + 1\right)^2}} \Rightarrow$

$$d'(t) = \frac{\left(x(t) - 1\right) + \left(e^{x(t)} + 1\right)e^{x(t)}}{\sqrt{\left(x(t) - 1\right)^2 + \left(e^{x(t)} + 1\right)^2}}x'(t)$$

την στιγμή που το Μ διέρχεται από τον άξονα y'y οπότε $x(t_0) = 0$.

Οπότε $d'(t_0) = \dfrac{\left(x(t_0) - 1\right) + \left(e^{x(t_0)} + 1\right)e^{x(t_0)}}{\sqrt{\left(x(t_0) - 1\right)^2 + \left(e^{x(t_0)} + 1\right)^2}}x'(t_0) \Rightarrow$

$$d'(t_0) = \frac{(0-1) + \left(e^0 + 1\right)e^0}{\sqrt{(0-1)^2 + \left(e^0 + 1\right)^2}}2 \Rightarrow d'(t_0) = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow d'(t_0) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

ΟΜΑΔΑ Α

1 Έστω $x > 0$ και Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ, το οποίο έχει κορυφές τα σημεία Ο(0, 0), Α(2x, 0) και $B\left(0, \sqrt{x} - 3\right)$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του Ε όταν $x = 16$ cm.

2 Οι διαστάσεις x, y ενός ορθογωνίου είναι 30 και 40 cm αντίστοιχα και αρχίζουν να ελαττώνονται με ρυθμό 1 cm/sec και 3 cm/sec αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του ορθογωνίου, που οι διαστάσεις του είναι $x = 20$ cm, $y = 10$ cm κατά τη χρονική στιγμή t_0.

3 Η ακτίνα R ενός κύκλου μεταβάλλεται σύμφωνα με τον τύπο $R = 3 + \frac{1}{2}t^2$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της περιμέτρου και του εμβαδού του κύκλου τη χρονική στιγμή που είναι $t = 2$ sec.

4 Δύο σημεία Α και Β κινούνται στους άξονες Οx και Οy αντίστοιχα με ταχύτητα $U_A = 9$ m/sec και $U_B = 4$ m/sec απομακρυνόμενα από το Ο. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της αποστάσεώς τους κατά τη χρονική στιγμή που το Α απέχει από την αρχή των αξόνων 5 m, ενώ το Β απέχει από το Ο απόσταση 3 m.

5 Δύο σημεία Α και Β κινούνται στους ημιάξονες Οx και Οy αντίστοιχα. Τα μήκη ΟΑ και ΟΒ ελαττώνονται με ρυθμό μεταβολής 2 cm/sec και 5 cm/sec αντίστοιχα. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του ΑΒ όταν ΟΑ = 4 cm και ΟΒ = 2 cm.

6 Τα σημεία Α και Β κινούνται στους άξονες Οx και Οy αντίστοιχα ώστε το ΑΒ να εφάπτεται συνεχώς του κύκλου $x^2 + y^2 = 16$. Να βρεθεί η ταχύτητα απομάκρυνσης του Α από την αρχή των αξόνων Ο όταν το Β πλησιάζει προς το Ο με ταχύτητα $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm/sec τη στιγμή που ΟΒ = 9 cm.